Revista Integración
Escuela de Matemáticas
Universidad Industrial de Santander
Vol. 29, No. 1, 2011, pág. 15–30

Introducción a la teoría geométrica de grupos

Olga Salazar-Díaz[a,*], Gabriel Vergara-Ríos[b]
[a] Universidad Nacional de Colombia, Escuela de Matemáticas, Medellín, Colombia.
[b] Universidad de Córdoba, Dpto. de Matemáticas y Estadística, Montería, Colombia.

Resumen. En este artículo haremos una introducción a la teoría geométrica de grupos. Veremos cómo a partir de una presentación finita de un grupo, se puede dotar a dicho grupo de una estructura de espacio métrico; se discute la acción del grupo sobre dicho espacio y se estudian propiedades geométricas que se preservan bajo cuasi isometría.
Palabras claves: acción de grupos, grafos de Cayley cuasi isometrías, embebimientos cuasi isométricos.
MSC2000: 20F65, 05C25.

Introduction to geometric group theory

Abstract. In this article we will give an introduction to geometric group theory. We will see how from a finite presentation of a group, we can give this group a metric space structure. We discuss the action of the group on this space and we study geometric properties preserved under quasi-isometry.
Keywords: group action, Cayley graphs, quasi-isometries, quasi-isometric embeddings.

1. Introducción

La teoría geométrica de grupos permite estudiar grupos finitamente generados, explorando la conexión entre propiedades algebraicas y propiedades geométricas de los espacios sobre los cuales estos grupos actúan. Para el estudio de estos grupos se les asocia un grafo de Cayley, el cual se puede dotar con estructura de espacio métrico, usando la métrica de la palabra.

* Autor para correspondencia: *E-mail*: `opsalazard@unal.edu.co`
Recibido: 7 de Febrero de 2011, Aceptado: 20 de Mayo de 2011.

A mediados del siglo XX, M. Dhen, J. Nielsen, K. Reidemeister y O. Schreier, J.H.S. Whitehead y E.R. van Kampen entre otros, introdujeron algunas ideas geométricas y topológicas para el estudio de grupos discretos. Más tarde, en los años ochenta M. Gromov hizo otros aportes que le dieron resurgimiento a estas ideas y surgió la Teoría Geométrica como área de estudio.

En este artículo pretendemos presentar una introducción a esta teoría. Nuestra discusión se centra en construir, a partir de un grupo finitamente presentado (para presentaciones de grupos ver [5]), su grafo de Cayley y, visto este como espacio topológico, estudiar propiedades que pueden ser traducidas en propiedades algebraicas del grupo. También discutiremos el concepto de cuasi isometría, el cual permite relacionar grafos de Cayley asociados a diferentes presentaciones de un mismo grupo.

Describimos entonces conceptos básicos de la teoría, algunas construcciones y resultados que reflejan la importancia de estas relaciones algebraico-geométricas y hacemos algunas pruebas que no se encuentran en la literatura.

2. Preliminares

2.1. Nociones básicas de topología

Iniciamos esta sección presentando algunas definiciones y resultados de topología, necesarios para el estudio de espacios métricos que encontraremos a lo largo de este artículo. Estos conceptos pueden revisarse también en [4] y [6].

Definición 2.1.

- Sea (X, d) un espacio métrico. **La longitud** $\ell(c)$ de una curva $c : [a, b] \to X$ es
$$\ell(c) = \sup_{a=t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b} \sum_{i=0}^{n-1} d(c(t_i), c(t_{i+1}))$$
donde el supremo se toma sobre todas las posibles particiones con $a = t_0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n = b$. La longitud $\ell(c)$ o bien es un número no negativo o es infinita. Si $\ell(c)$ es finita, diremos que la curva c es rectificable.

- Un espacio métrico (X, d) se denomina **espacio de longitud** si la distancia entre cada par de puntos $x, y \in X$ es igual al ínfimo de las longitudes de las curvas rectificables uniendo a x con y.

- Sea (X, d) un espacio métrico. X se denomina **espacio propio** si toda bola cerrada de radio finito es compacta.

- Sea (X, d) un espacio métrico. Una **geodésica** que une a $x \in X$ y a $y \in X$ es una función $c : [0, d(x, y)] \to X$, tal que $c(0) = x$, $c(d(x, y)) = y$ y $d(c(t), c(t')) = |t - t'|$ para todo $t, t' \in [0, d(x, y)]$. El espacio métrico (X, d) se dice **geodésico** si cada par de puntos en X puede ser unido mediante una geodésica.
- Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos. A $X \times Y$, se le puede dotar de una métrica definiendo la distancia para cada par de puntos $z = (x, y)$, $z' = (x', y') \in X \times Y$, de varias maneras; una de ellas es: $d_{X \times Y}(z, z') = d_X(x, x') + d_Y(y, y')$.

La prueba del siguiente teorema puede ser consultada en [1, p. 35].

Teorema 2.2 (Teorema de Hopf-Rinow). *Sea X un espacio de longitud. Si X es completo y localmente compacto, entonces X es un espacio geodésico propio.*

2.2. Acción de grupos

Recordamos la definición de la acción de un grupo en un espacio topológico y probamos resultados de gran utilidad en la siguiente sección.

Definición 2.3. Una **acción** de un grupo G sobre un espacio topológico X es un homomorfismo $\phi : G \to Homeo(X)$, donde $Homeo(X)$ es el grupo de homeomorfismos de X.

Observaciones:

- Usaremos $g \cdot x$ para denotar la imagen de $x \in X$ bajo ϕ_g; es decir, $\phi : G \to Homeo(X)$ definida para todo $g \in G$ por ϕ_g, donde $\phi_g : X \to X$ está definida para todo $x \in X$ por $\phi_g(x) = g \cdot x$. Así, una acción de un grupo G en un espacio topológico X es una función $h : G \times X \to X$, definida para todo $(g, x) \in G \times X$ por $h(g, x) = g \cdot x$.
- Para cualquier subconjunto $Y \subset X$, $g \cdot Y = \phi_g(Y)$.
- Escribiremos $G \cdot Y$ para denotar $\bigcup_{g \in G} g \cdot Y$.

Definición 2.4. Sea G un grupo actuando en un espacio métrico X.

- Diremos que G **actúa en X por isometrías** si

$$Im\phi \subseteq Isom(X) \subseteq Homeo(X).$$

- G actúa **cocompactamente** en X si existe $K \subset X$ compacto tal que $G \cdot K = X$.
- La acción de G en X se dice **propia** si para cada $x \in X$ existe $r > 0$ tal que
$$\{g \in G \mid g \cdot B(x,r) \cap B(x,r) \neq \emptyset\}$$
es finito.

Lema 2.5. *Si la acción de G en X es propia, entonces para cada subconjunto compacto $K \subseteq X$ existe una vecindad abierta U tal que $\{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ es finito.*

Demostración. Sea $K \subseteq X$ compacto. Como para todo $x \in K$, $x \in X$, y la acción de G en X es propia, existe $r_x > 0$ tal que $\{g \in G \mid g \cdot B(x,r_x) \cap B(x,r_x) \neq \emptyset\}$ es finito. Es claro que $K \subseteq \bigcup_{x_i \in K} B(x_i, \frac{r_i}{4})$, y como K es compacto, existen $x_1, x_2, \cdots, x_n \in K$ tales que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \frac{r_i}{4})$, con $x_i \in K$ y
$$S(i) = \{g \in G \mid g \cdot B(x_i,r_i) \cap B(x_i,r_i) \neq \emptyset\} \quad \text{es finito.}$$
Sea
$$U = \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \tfrac{r_i}{4}\right);$$
entonces U es una vecindad abierta de K. Afirmamos que $\{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ es finito, pues si existiesen infinitos $g_n \in G$ (distintos) tales que $g_n \cdot U \cap U \neq \emptyset$, entonces
$$\left(g_n \cdot \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x_i, \tfrac{r_i}{4}\right)\right) \cap \bigcup_{j=1}^{n} B\left(x_j, \tfrac{r_j}{4}\right) \neq \emptyset$$
para infinitos $g_n \in G$, de donde se sigue que
$$\left(\bigcup_{i=1}^{n} g_n \cdot B\left(x_i, \tfrac{r_i}{4}\right)\right) \cap \bigcup_{j=1}^{n} B\left(x_j, \tfrac{r_j}{4}\right) \neq \emptyset$$
para infinitos $g_n \in G$, es decir,
$$\bigcup_{i=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{n} \left(g_n \cdot B\left(x_i, \tfrac{r_i}{4}\right) \cap B\left(x_j, \tfrac{r_j}{4}\right)\right) \neq \emptyset$$
para infinitos $g_n \in G$. Luego existen $i_0, i_1 \in \{1, \cdots, n\}$ tales que
$$g_n \cdot B\left(x_{i_0}, \tfrac{r_{i_0}}{4}\right) \cap B\left(x_{i_1}, \tfrac{r_{i_1}}{4}\right) \neq \emptyset$$

para infinitos $g_n \in G$, lo que a su vez implica que $B\left(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}\right) \cap g_n^{-1} \cdot B\left(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4}\right) \neq \emptyset$ para infinitos $g_n \in G$. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $r_{i_0} \geq r_{i_1}$; entonces $g_n^{-1} \cdot B\left(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4}\right) \subset B\left(x_{i_0}, r_{i_0}\right)$. Además, si $g_m \in G$ es tal que

$$g_m \cdot B\left(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}\right) \cap B\left(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4}\right) \neq \emptyset,$$

entonces

$$g_n^{-1} g_m \cdot B\left(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}\right) \cap g_n^{-1} \cdot B\left(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4}\right) \neq \emptyset$$

$\Big($esto pues $g_m \cdot B\left(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}\right) \cap B\left(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4}\right) \neq \emptyset$ implica que

$$g_n^{-1} \cdot \left[g_m \cdot B\left(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}\right) \cap B\left(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4}\right)\right] \neq \emptyset,$$

es decir,

$$g_n^{-1} \cdot \left[g_m \cdot B\left(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}\right) \cap B\left(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4}\right)\right] = g_n^{-1} g_m \cdot B\left(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}\right) \cap g_n^{-1} \cdot B\left(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4}\right) \neq \emptyset\Big);$$

así, existen infinitos $g_n^{-1} g_m \in G$ tales que

$$(g_n^{-1} g_m) \cdot B\left(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}\right) \cap g_n^{-1} \cdot B\left(x_{i_1}, \frac{r_{i_1}}{4}\right) \neq \emptyset,$$

y de aquí que existen infinitos $g_n^{-1} g_m \in G$ tales que

$$(g_n^{-1} g_m) \cdot B\left(x_{i_0}, \frac{r_{i_0}}{4}\right) \cap B(x_{i_0}, r_{i_0}) \neq \emptyset,$$

lo que a su vez implica que existen infinitos $g_n^{-1} g_m \in G$ tales que

$$(g_n^{-1} g_m) \cdot B(x_{i_0}, r_{i_0}) \cap B(x_{i_0}, r_{i_0}) \neq \emptyset;$$

es decir,

$$S(i_0) = \{g \in G \mid g \cdot B(x_{i_0}, r_{i_0}) \cap B(x_{i_0}, r_{i_0}) \neq \emptyset\}$$

es infinito, lo cual contradice el hecho de que

$$S(i_0) = \{g \in G \mid g \cdot B(x_{i_0}, r_{i_0}) \cap B(x_{i_0}, r_{i_0}) \neq \emptyset\}$$

es finito. En consecuencia, $\{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ es finito. ☑

Lema 2.6. *Sea X un espacio de longitud. Si existe un grupo actuando propia, cocompactamente y por isometrías en X, entonces X es completo y localmente compacto; así, por el Teorema de Hopf-Rinow, X es un espacio geodésico propio.*

Demostración. Sea G un grupo actuando propia y cocompactamente por isometrías en X. Entonces existe $K \subseteq X$ compacto tal que $G \cdot K = X$, es decir, $X = \bigcup_{g\in G} g \cdot K$. Como la acción es propia, por el lema anterior existe U vecindad abierta de K tal que $\{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ es finito.

Sea $x \in X$; entonces $x \in K$ ó $x \in X \setminus K$. Haremos el análisis sólo para el caso $x \in K$, pues si $x \in X \setminus K$, como $X = \bigcup_{g\in G} g \cdot K$, existe $g_0 \in G$ tal que $x \in g_0 \cdot K = \phi_{g_0}(K)$, el cual es compacto, pues ϕ_{g_0} es un homeomorfismo.

Si $x \in K$, sea $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset U$. Consideremos la bola $\overline{B}(x, \frac{r}{2})$; claramente $\overline{B}(x, \frac{r}{2}) \subset U$. Afirmamos que $\overline{B}(x, \frac{r}{2})$ es compacta. En efecto, dada $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sucesión en $\overline{B}(x, \frac{r}{2})$, como para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in X = \bigcup_{g\in G} g \cdot K$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, existen $(g_n) \subset G$ y $(k_n) \subset K$ tales que $x_n = g_n \cdot k_n$. Nótese que para todo n, $x_n \in g_n \cdot U \cap U$, por lo que $g_n \cdot U \cap U \neq \emptyset$; pero como $\{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ es finito, entonces $\{g_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \{g_1, g_2, \cdots, g_k\}$. Luego existen $g \in \{g_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ y $(x_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ subsucesión de (x_n) tales que $x_{n_j} = g \cdot k_{n_j}$. Consideremos la sucesión $(k_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$; entonces $(k_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en K, y como K es compacto, existe $(k_{n_{j_l}})_{l\in\mathbb{N}}$ subsucesión de $(k_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ y existe $k_0 \in K$ tal que $k_{n_{j_l}} \to k_0 (l \to \infty)$; luego $g \cdot k_{n_{j_l}} \to g \cdot k_0$. Así, $\{g \cdot k_{n_{j_l}}\}$ converge a $g \cdot k_0$. Entonces $(x_{n_{j_l}})$ es una subsucesión de (x_n) convergente a $g \cdot k_0 \in \overline{B}(x, \frac{r}{2})$. Por tanto $\overline{B}(x, \frac{r}{2})$ es compacta. En consecuencia, X es localmente compacto.

Probemos ahora que X es completo. En efecto, sea (x_n) una sucesión de Cauchy en X.

Como $X = \bigcup_{g\in G} g \cdot K$, entonces para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n = g_n \cdot k_n$, con $(k_n) \subseteq K$ y $(g_n) \subseteq G$. Como $(k_n) \subseteq K$ y K es compacto, existe $(k_{n_j})_{j\in\mathbb{N}}$ subsucesión de (k_n) y existe $k_0 \in K$ tales que $k_{n_j} \to k_0$ $(j \to \infty)$. Como $k_0 \in X$ y la acción de G en X es propia, existe $r_0 > 0$ tal que $\{g \in G \mid \ g \cdot B(k_0, r_0) \cap B(k_0, r_0) \neq \emptyset\}$ es finito. De otra parte, como $k_{n_j} \to k_0$, existe $N_1 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $j \geq N_1$, $d(k_{n_j}, k_0) < \frac{r_0}{3}$. Como (x_n) es de Cauchy, existe $N_2 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $m, n \geq N_2$, $d(x_n, x_m) < \frac{r_0}{3}$. Sea $N := \text{máx}\{N_1, N_2\}$. Entonces, para todo $i, j \geq N$,

$$\begin{aligned} d(g_{n_j}^{-1} g_{n_i} \cdot k_0, k_0) &= d(g_{n_i} \cdot k_0, g_{n_j} \cdot k_0) \\ &\leq d(g_{n_i} \cdot k_0, g_{n_i} \cdot k_{n_i}) + d(g_{n_i} \cdot k_{n_i}, g_{n_j} \cdot k_{n_j}) + d(g_{n_j} \cdot k_{n_j}, g_{n_j} \cdot k_0) \\ &= d(k_0, k_{n_i}) + d(x_{n_i}, x_{n_j}) + d(k_{n_j}, k_0) \\ &< \frac{r_0}{3} + \frac{r_0}{3} + \frac{r_0}{3} \ = \ r_0. \end{aligned}$$

Por tanto, para todo $i, j \geq N$, $g_{n_j}^{-1} g_{n_i} \cdot k_0 \in B(k_0, r_0)$, y como

$$g_{n_j}^{-1} g_{n_i} \cdot k_0 \in (g_{n_j}^{-1} g_{n_i}) \cdot B(k_0, r_0),$$

entonces para todo $i, j \geq N$,

$$g_{n_j}^{-1} g_{n_i} \cdot k_0 \in B(k_0, r_0) \cap (g_{n_j}^{-1} g_{n_i}) \cdot B(k_0, r_0);$$

es decir, para todo $i, j \geq N$,

$$B(k_0, r_0) \cap (g_{n_j}^{-1} g_{n_i}) \cdot B(k_0, r_0) \neq \emptyset;$$

pero como $\{g \in G \mid \ g \cdot B(k_0, r_0) \cap B(k_0, r_0) \neq \emptyset\}$ es finito, entonces

$$\{g_{n_j}^{-1} g_{n_i} \mid i, j \geq N\} = \{g_1, g_2, \cdots, g_k\};$$

luego existe $g_t \in \{g_1, g_2, \cdots, g_k\}$ y existe $(x_{n_{j_l}})$ subsucesión de (x_n) tales que $x_{n_{j_l}} = g_t \cdot k_{n_{j_l}}$. Consideremos la sucesión $(k_{n_{j_l}})$; entonces $(k_{n_{j_l}})$ es una subsucesión de (k_{n_j}), y como $k_{n_j} \to k_0$, entonces $k_{n_{j_l}} \to k_0$. Luego, $g_t \cdot k_{n_{j_l}} \to g_t \cdot k_0 \in X$; es decir, $x_{n_{j_l}} \to g_t \cdot k_0 \in X$. Por tanto, $(x_{n_{j_l}})$ es una subsucesión convergente de (x_n). En consecuencia, X es completo. ☑

Lema 2.7. *Sea G un grupo actuando propiamente y por isometrías en un espacio métrico X. Entonces para todo $g \in G$ y todo subconjunto abierto $U \subset X$, $g \cdot U$ es abierto en X.*

Demostración. Sea $z \in g.U$; entonces $z = g \cdot u$ con $u \in U$. Como $u \in U$ y U es abierto en X, existe $r > 0$ tal que $B(u, r) \subset U$. Afirmamos que $B(z, r) \subset g \cdot U$. En efecto, dado $y \in B(z, r)$, $d(y, z) < r$, es decir $d(y, g \cdot u) < r$, por lo que $d(g^{-1} \cdot y, u) < r$, por lo cual $g^{-1} \cdot y \in B(u, r) \subset U$, de donde se sigue que $y \in g \cdot U$. Por tanto $B(z, r) \subset g \cdot U$; en consecuencia, $g \cdot U$ es abierto en X. ☑

Corolario 2.8. *Sean G y X como en el lema anterior; entonces para todo $g \in G$, $g \cdot B(x, r)$ es abierto en X.*

3. Grafos y 2-complejos asociados a presentaciones de grupos

En esta sección construiremos una presentación para un grupo arbitrario G actuando por homeomorfismos sobre un espacio topológico simplemente conexo X. Además, si X es un espacio de longitud simplemente conexo y G actúa propia, cocompactamente y por isometrías en X, entonces la construcción que describiremos dará una presentación finita para G.

3.3. Grafos combinatorios y 2-complejos

Definición 3.1.

- Un grafo combinatorio Γ consiste de un par (ν, ϵ), donde ν es el conjunto de vértices y ϵ es el conjunto de aristas, y un par de funciones $\partial_0, \partial_1 : \epsilon \to \nu$, llamadas puntos finales. Supondremos que $\nu = \partial_0(\epsilon) \cup \partial_1(\epsilon)$.

  Asociaremos a Γ el conjunto X, donde $X := (\epsilon \times [0,1])/\sim$ y "$\sim$" es la relación de equivalencia generada por $(e, i) \sim (\hat{e}, \hat{i})$, si $\partial_i(e) = \partial_{\hat{i}}(\hat{e})$, con $e, \hat{e} \in \epsilon$ y $i, \hat{i} \in \{0,1\}$. Sea $p : \epsilon \times [0,1] \to X$ la función cociente tal que $\nu = p(\epsilon \times \{0,1\})$. Para cada $e \in \epsilon$, sea $f_e : [0,1] \to X$, definida para todo $t \in [0,1]$ por $f_e(t) = p(e,t)$. Si $f_e(0) = f_e(1)$, diremos que la arista e es un lazo (*loop*).

- Un camino lineal por tramos es una función $c : [0,1] \to X$ para la cual existe una partición $0 = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = 1$ tal que para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $c\mid_{[t_i, t_{i+1}]} = f_{e_i} \circ c_i$, donde $e_i \in \epsilon$ y $c_i : [t_i, t_{i+1}] \to [0,1]$ es una función afín. Diremos que c une a x con y si $c(0) = x$ y $c(1) = y$. La longitud de c, denotada $l(c)$, está definida por $l(c) = \sum_{i=0}^{n-1} l(c_i)$, donde

  $$l(c_i) = \lambda(e_i)\,|c_i(t_i) - c_{i+1}(t_{i+1})| \quad \text{y} \quad \lambda : \epsilon \to (0, \infty)$$

  es una función que asocia una longitud $\lambda(e)$ a cada arista e.

- Definimos una seudo métrica $d : X \times X \to [0, \infty]$ así:

  $$d(x,y) = \inf\{l(c) \mid c : [0,1] \to X \text{ es un camino lineal por tramos que une a } x \text{ y } y\}.$$

  (X, d) será llamado un grafo métrico.

Definición 3.2. El grafo de Cayley $\mathcal{C}_A(G)$ de un grupo G con respecto a un conjunto de generadores A, es el grafo métrico cuyos vértices están en correspondencia 1–1 con los elementos de G, y el cual tiene una arista (marcada a) de longitud 1 uniendo g a ga para cada $g \in G$ y cada $a \in A$. Aquí, $\nu = G$, $\epsilon = \{(g,a) \mid g \in G,\ a \in A\}$, $\partial_0(g,a) = g$, $\partial_1(g,a) = ga$ y $\lambda : \epsilon \to (0, +\infty)$ es la función constante 1.

Las aristas dirigidas en $\mathcal{C}_A(G)$ están marcadas por los generadores y sus inversos; por tanto, existe una correspondencia 1–1 entre las palabras en $F(A)$ y los caminos de aristas saliendo desde cada vértice de $\mathcal{C}_A(G)$. Un camino es un lazo si y sólo si la palabra marcando a este camino es la identidad en G. La acción de G en sí mismo por multiplicación a izquierda extiende a una acción libre sobre $\mathcal{C}_A(G)$, a saber: la acción de g_0 envía la arista marcada a e iniciando en g a la arista marcada a e iniciando en el vértice $g_0 g$.

Definición 3.3. Un 2-complejo consiste de un espacio K y una colección $\{X^2,\ X^1,\ X^0\}$ de subespacios de K, donde $K = X^2$, $K \neq X^1$, $K \neq X^0$, y tales que:

i) X^0 es discreto;

ii) $K = X^2$ es obtenido de X^1 pegando 2-celdas;

iii) $K = \bigcup_{n=0}^{2} X^n$;

iv) K tiene la topología débil respecto a $\{X^2,\ X^1,\ X^0\}$.

Cualquier CW complejo 2-dimensional K puede ser dotado de una estructura por piezas, metrizando el 1-esqueleto de K de modo que este pueda ser visto como un grafo métrico con aristas de longitud 1 y tal que cada e_α sea un polígono regular con lados de longitud 1, donde e_α es una 2-celda asociada a K. Para una mayor referencia de esta construcción ver [1, p. 154].

3.4. 2-Complejos asociados a presentaciones de grupos

Dados cualquier grupo G, una presentación de G, $\langle A \mid R\rangle$ y $\mathcal{C}_A(G)$ su correspondiente grafo de Cayley, podemos asociar a esta presentación un 2-complejo $K := K(A; R)$. K tiene un vértice, correspondiente a la palabra vacía en $F(A)$ y este tiene una arista ϵ_a (orientada y marcada a) por cada generador $a \in A$; los elementos en el 1-esqueleto de K están en correspondencia 1–1 con las palabras en $F(A)$, a saber: la letra a^{-1} corresponde a atravesar la arista ϵ_a en dirección opuesta a su orientación, y la palabra $w = a_1 \dots a_n$ corresponde al camino que es la yuxtaposición de las aristas dirigidas $a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n$; en este caso decimos que w marca este camino.

Las 2-celdas e_α de K son indizadas por las relaciones $r \in R$, por lo cual de ahora en adelante escribiremos e_r en lugar de e_α. Si $r = a_1 a_2 \dots a_n$, entonces e_r está pegada a lo largo del lazo marcado $a_1 a_2 \dots a_n$.

Lema 3.4. *Sea G un grupo con conjunto generador A y sea R un subconjunto del núcleo de la función natural $F(A) \to G$. Consideremos el 2-complejo que obtenemos pegando 2-celdas a todas las aristas lazos en el grafo de Cayley $\mathcal{C}_A(G)$ que son marcadas por las palabras reducidas $r \in R$. Este 2-complejo es simplemente conexo si y sólo si $\overline{R} = Ker(F(A) \to G)$.*

Demostración. Ver [1, p. 135]. ☑

Teorema 3.5. *Sean X un espacio topológico, G un grupo actuando en X por homeomorfismos y $U \subseteq X$ un abierto tal que $X = G \cdot U$.*

i) Si X es conexo, entonces el conjunto $S = \{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ genera a G.

ii) Sea A_S un conjunto de símbolos a_s indizados por S. Si tanto X como U son conexos por caminos y X es simplemente conexo, entonces $G = \langle A_S \mid R\rangle$, donde

$$R = \{a_{s_1} a_{s_2} a_{s_3}^{-1} \mid s_i \in S;\ U \cap (s_1 \cdot U) \cap (s_3 \cdot U) \neq \emptyset;\ s_1 s_2 = s_3 \text{ en } G\}.$$

Demostración. Ver [1, p. 135]. ☑

Corolario 3.6. *Un grupo G es finitamente presentado si y sólo si actúa propia, cocompactamente y por isometrías en un espacio geodésico simplemente conexo.*

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que G tiene la presentación finita $\langle A \mid R\rangle$. Consideremos el grafo de Cayley $\mathcal{C}_A(G)$ de G y sea $K := K(A; R)$ el 2-complejo combinatorio obtenido pegando 2-celdas en todas las aristas lazos de $\mathcal{C}_A(G)$ marcadas por las palabras reducidas $r \in R$. Por el Lema 3.4, este 2-complejo es simplemente conexo. Seguidamente metricemos a este 2-complejo simplemente conexo, como un 2-complejo euclídeo por piezas, digamos $\widetilde{K}$, en el cual todas las aristas tengan longitud 1 y todas las 2-celdas sean polígonos regulares (ver [1, p. 153]) de lados de longitud 1.

Ahora, la acción de G sobre $\mathcal{C}_A(G)$ la podemos extender a una acción de G por isometrías sobre $\widetilde{K}$. Además, como este 2-complejo es euclídeo por piezas y conexo, entonces dados dos puntos cualesquiera, existe un segmento geodésico uniendo dichos puntos. Como G es finitamente presentado, $\widetilde{K}$ es un espacio de longitud, pues dados dos puntos cualesquiera g_1, g_2 en $\widetilde{K}$, existe un camino de longitud mínima uniendo g_1 con g_2, y dicha longitud es la distancia entre los puntos g_1 y g_2.

Afirmamos que la acción de G sobre $\widetilde{K}$ es propia. En efecto, sea g_0 cualquier vértice de $\widetilde{K}$. Como G tiene presentación finita, existe un número finito de aristas de longitud 1 que comienzan en g_0. Tomando $r = 2$, tenemos que

$$\{g \in G \mid g \cdot B(g_0, 2) \cap B(g_0, 2) \neq \emptyset\}$$

es finito (esto pues G tiene la presentación finita $\langle A \mid R\rangle$).

Como g_0 fue tomado arbitrariamente, concluimos que para cualquier vértice $g_0 \in \widetilde{K}$, existe $r > 0$ tal que $\{g \in G \mid g \cdot B(g_0, r) \cap B(g_0, r) \neq \emptyset\}$ es finito. Por tanto la acción de G sobre $\widetilde{K}$ es propia.

De otro lado, dado un vértice cualquiera g de $\widetilde{K}$, sabemos que existe un número finito de aristas de longitud 1 que inciden en g, digamos $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Consideremos la bola $\overline{B}(g, 1)$; entonces $\overline{B}(g, 1)$ es un subconjunto compacto de $\widetilde{K}$ y contiene todos los puntos finales de $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Seguidamente consideremos cada uno de los polígonos aristas teniendo vértice inicial y final el punto final de cada arista a_i, y sea $C := \overline{B}(g, 1) \cup \bigcup_{i=1}^n P_i$, donde los P_i son los polígonos descritos arriba. Entonces C es compacto, y es claro que $G \cdot C = \widetilde{K}$. Por tanto, G actúa propia, cocompactamente y por isometrías sobre el espacio geodésico simplemente conexo $\widetilde{K}$.

$\Leftarrow$) Sea G un grupo actuando propia, cocompactamente y por isometrías sobre un espacio geodésico simplemente conexo X. Como G actúa en X cocompactamente, existe $C \subset X$ compacto tal que $G \cdot C = X$. Sean $x_0 \in X$ y $R > 0$ tales que $C \subset B(x_0, R)$; sea $U = B(x_0, R)$; entonces U es un subconjunto abierto de X. Afirmamos que $X = G \cdot U$. En efecto, sea $y \in G \cdot C = \bigcup_{g \in G} g \cdot C$. Entonces $\exists g \in G : y \in g \cdot C$, es decir,

$$\begin{aligned}
&\exists g \in G : y = g \cdot c \quad \text{con} \quad c \in C \subset B(x_0, R), \quad \text{o sea} \\
&\exists g \in G : y = g \cdot c \quad \text{con} \quad c \in B(x_0, R) = U, \quad \text{de donde} \\
&\exists g \in G : y \in g \cdot U, \quad \text{y por lo tanto} \\
&y \in \bigcup_{g \in G} g \cdot U = G \cdot U.
\end{aligned}$$

Tenemos así que $X = G \cdot C \subset G \cdot U \subset X$, y por tanto $X = G \cdot U$.

Como X es un espacio simplemente conexo y geodésico, entonces X es un espacio de longitud; además, como G actúa en X propia, cocompactamente y por isometrías, por el Lema 2.6, X es completo y localmente compacto, y por el Teorema 2.2, cada subconjunto cerrado y acotado de X es compacto, es decir, X es propio. Como G actúa propiamente en X y $x_0 \in X$, entonces el subconjunto $\{g \in G \mid g \cdot B(x_0, R) \cap B(x_0, R) \neq \emptyset\}$ de G es finito; luego, por el Teorema 3.5(i), el conjunto de generadores de G, $S = \{g \in G \mid g \cdot U \cap U \neq \emptyset\}$ es finito; y por el Teorema 3.5(ii) se tiene que $G = \langle A_S \mid R \rangle$, donde A_S es un conjunto de símbolos indizados por S (y por tanto finito) y

$$R = \{a_{s_1} a_{s_2} a_{s_3}^{-1} \mid s_i \in S;\ U \cap s_1 \cdot U \cap s_3 \cdot U \neq \emptyset;\ s_1 s_2 = s_3 \text{ en } G\}$$

(por tanto finito). En consecuencia, G es finitamente presentado. ☑

4. Cuasi isometrías

Dada una presentación finita de un grupo G, sabemos que hay un grafo de Cayley asociado, al cual podemos dotar de estructura de espacio métrico. Si el grupo G es definido por otra presentación, se tiene otro espacio métrico. El concepto de cuasi isometría define la relación entre dichos espacios. Tal concepto es el objeto de esta sección.

Definición 4.1. Sean (X_1, d_1) y (X_2, d_2) espacios métricos. Se dice de una función (no necesariamente continua) $f : X_1 \to X_2$ que es un (λ, ε) **embebimiento cuasi isométrico** si existen constantes $\lambda \geq 1$ y $\varepsilon \geq 0$ tales que para todo $x, y \in X_1$

$$\frac{1}{\lambda} d_1(x, y) - \varepsilon \leq d_2(f(x), f(y)) \leq \lambda d_1(x, y) + \varepsilon.$$

Además, si existe una constante $C \geq 0$ con la propiedad de que para todo $x_2 \in X_2$ existe $x_1 \in X_1$ tal que $d_2(f(x_1), x_2) < C$, f se dice una (λ, ε) **cuasi isometría**, y X_1 se dice cuasi isométrico a X_2, y escribiremos X_1 C-I X_2.

Proposición 4.2. *Si R, S, T y W son espacios métricos tales que R está C-I embebido en S y T está C-I embebido en W, entonces $R \times T$ está C-I embebido en $S \times W$.*

Demostración. Como R está C-I embebido en S y T está C-I embebido en W, existen $\alpha : R \to S$ y $\beta : T \to W$, y existen constantes $\lambda_1, \lambda_2 \geq 1$, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \geq 0$, tales que:

para todo $x, y \in S$,

$$\frac{1}{\lambda_1} d_R(x, y) - \varepsilon_1 \leq d_S(\alpha(x), \alpha(y)) \leq \lambda_1 d_R(x, y) + \varepsilon_1; \tag{1}$$

y para todo $s, t \in T$,

$$\frac{1}{\lambda_2} d_T(s, t) - \varepsilon_2 \leq d_W(\beta(s), \beta(t)) \leq \lambda_2 d_T(s, t) + \varepsilon_2. \tag{2}$$

Ahora, sea $\varphi : R \times T \to S \times W$, definida para todo $(v, w) \in R \times T$ por $\varphi(v, w) = (\alpha(v), \beta(w))$. Luego, para todo $(x, y), (v, w) \in R \times T$ tenemos que

$$\begin{aligned} d_{S\times W}(\varphi(x, y), \varphi(v, w)) &= d_{S\times W}((\alpha(x), \beta(y)), (\alpha(v), \beta(w))) \\ &= d_S(\alpha(x), \alpha(v)) + d_W(\beta(y), \beta(w)) \\ &\leq \lambda_1 d_R(x, v) + \varepsilon_1 + \lambda_2 d_T(y, w) + \varepsilon_2. \end{aligned} \tag{3}$$

Sean $\lambda = \text{máx}\{\lambda_1, \lambda_2\}$ y $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$. Entonces la ecuación (3) se transforma en

$$\begin{aligned} d_{S\times W}(\varphi(x,y),\varphi(v,w)) &\le \lambda[d_R(x,v) + d_T(y,w)] + \varepsilon \\ &= \lambda d_{R\times T}((x,y),(v,w)) + \varepsilon. \end{aligned} \tag{4}$$

Además,

$$\frac{1}{\lambda_1} d_R(x,v) - \varepsilon_1 \le d_S(\alpha(x),\alpha(v))$$

y

$$\frac{1}{\lambda_2} d_T(y,w) - \varepsilon_2 \le d_W(\beta(y),\beta(w)),$$

por lo que

$$\frac{1}{\lambda_1} d_R(x,v) + \frac{1}{\lambda_2} d_T(y,w) - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \le d_S(\alpha(x),\alpha(v)) + d_W(\beta(y),\beta(w)),$$

y como $\lambda \ge \lambda_1, \lambda_2$, entonces

$$\frac{1}{\lambda} d_R(x,v) + \frac{1}{\lambda} d_T(y,w) - \varepsilon \le d_{S\times W}((\alpha(x),\beta(y)),(\alpha(v),\beta(w))),$$

es decir,

$$\frac{1}{\lambda} d_{R\times T}((x,y),(v,w)) - \varepsilon \le d_{S\times W}(\varphi(x,y),\varphi(v,w)). \tag{5}$$

De las ecuaciones (4) y (5) se sigue que $R \times T$ está C-I embebido en $S \times W$. ☑

Lema 4.3. *Todo grupo finitamente generado es un espacio métrico, bien definido salvo cuasi isometrías.*

Demostración. Sea G un grupo con conjunto generador (finito) A. Sea $d_A : G \times G \to \mathbb{R}$ definida para todo g_1, g_2 en G por

$$d_A(g_1,g_2) = \text{mín}\{n \ge 0 \mid g_1^{-1} g_2 = a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_n^{\varepsilon_n};\ a_i \in A;\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\}\}.$$

Afirmamos que d_A es una métrica. En efecto:

i) De la definición de d_A, es claro que para todo g_1, g_2 en G, $d_A(g_1,g_2) \ge 0$, y que $d_A(g_1,g_2) = 0$ si y sólo si $g_1^{-1} g_2 = 1$, lo que a su vez equivale a que $g_1 = g_2$.

ii) Para todo $g_1, g_2 \in G$,

$$d_A(g_1,g_2) = \text{mín}\{n \ge 0 \mid g_1^{-1} g_2 = a_1^{\varepsilon_1} a_2^{\varepsilon_2} \cdots a_n^{\varepsilon_n};\ a_i \in A;\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\}\}.$$

Sea $d_A(g_1,g_2) = n$; entonces $g_1^{-1} g_2 = w$ con $l(w) = n$, y de aquí que $g_1 = g_2 w^{-1}$ con $l(w^{-1}) = n$, es decir $g_2^{-1} g_1 = \widehat{w}$ con $\widehat{w} = w^{-1}$ y $l(\widehat{w}) = n$. Por tanto $d_A(g_2,g_1) = n$. En consecuencia, $d_A(g_1,g_2) = d_A(g_2,g_1)$.

iii) Sean $g_1, g_2, g_3 \in G$. Si $d_A(g_1, g_2) = p$, $d_A(g_2, g_3) = q$, entonces $g_2 = g_1 w$ con $l(w) = p$ y $g_3 = g_2 \widehat{w}$ con $l(\widehat{w}) = q$. Luego, $g_3 = g_2\widehat{w} = (g_1 w)\widehat{w} = g_1(w\widehat{w})$ con $l(w\widehat{w}) \leq l(w) + l(\widehat{w}) = p + q$. Por tanto,

$$d_A(g_1, g_3) \leq l(w\widehat{w}) \leq p + q = d_A(g_1, g_2) + d_A(g_2, g_3).$$

Así que d_A es una métrica y (G, d_A) es un espacio métrico.

Veamos ahora que la clase de cuasi isometrías de (G, d_A) es independiente de la elección de A. En efecto:

Sean A_1, A_2 dos conjuntos generadores (finitos) de G. Veamos que (G, d_{A_1}) es C-I a (G, d_{A_2}). En efecto, tomemos la identidad id : $(G, d_{A_1}) \to (G, d_{A_2})$. Además, sean $\lambda_1 = \text{máx}\{d_{A_2}(a_1, 1) \mid a_1 \in A_1\}$, $\lambda_2 = \text{máx}\{d_{A_1}(a_2, 1) \mid a_2 \in A_2\}$ y sea $\lambda = \text{máx}\{\lambda_1, \lambda_2\}$; entonces $\lambda \geq 1$. Sean $g_1, g_2 \in (G, d_{A_1})$. Tenemos los siguientes dos casos:

Caso *i)* Si $g_1 = g_2$, tomando $\varepsilon = 0$ se tiene que

$$\frac{1}{\lambda} d_{A_1}(g_1, g_2) - \varepsilon = 0 = d_{A_2}(\text{id}(g_1), \text{id}(g_2)) \leq \lambda d_{A_1}(g_1, g_2) + \varepsilon.$$

Caso *ii)* Si $g_1 \neq g_2$, entonces $g_1^{-1} g_2 \neq 1$, por lo que $d_{A_1}(g_1^{-1} g_2, 1) = l(g_1^{-1} g_2) \geq 1$ y $d_{A_2}(g_1^{-1} g_2, 1) \geq 1$. Además, como $g_1^{-1} g_2 \in G$ y A_1, A_2 generan a G, entonces $g_1^{-1} g_2 = w_1 w_2 \cdots w_n$ y $g_1^{-1} g_2 = u_1 u_2 \cdots u_m$ con $w_i \in A_1$, $u_i \in A_2$ para todo i y $m, n \geq 1$. Entonces:

$$\begin{aligned} d_{A_2}(\text{id}(g_1), \text{id}(g_2)) &= d_{A_2}(g_1, g_2) = d_{A_2}(g_1^{-1} g_2, 1) = d_{A_2}(w_1 w_2 \cdots w_n, 1) \\ &\leq d_{A_2}(w_1, 1) + \cdots + d_{A_2}(w_n, 1) \\ &\leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_1 \qquad (n \text{ veces}) \\ &= \lambda_1 n \\ &= \lambda_1 d_{A_1}(g_1^{-1} g_2, 1) \\ &= \lambda_1 d_{A_1}(g_1, g_2) \\ &\leq \lambda d_{A_1}(g_1, g_2), \end{aligned} \tag{6}$$

y

$$\begin{aligned}
d_{A_1}(g_1, g_2) &= d_{A_1}(\mathrm{id}(g_1), \mathrm{id}(g_2)) = d_{A_1}(g_1^{-1}g_2, 1) = d_{A_1}(u_1u_2\cdots u_m, 1)\\
&\leq d_{A_1}(u_1, 1) + \cdots + d_{A_1}(u_m, 1)\\
&\leq \lambda_2 + \cdots + \lambda_2 \qquad (m \text{ veces})\\
&= \lambda_2 m\\
&= \lambda_2 d_{A_2}(g_1^{-1}g_2, 1)\\
&= \lambda_2 d_{A_2}(g_1, g_2)\\
&\leq \lambda d_{A_2}(g_1, g_2)\\
&= \lambda d_{A_2}(\mathrm{id}(g_1), \mathrm{id}(g_2)). \qquad (7)
\end{aligned}$$

De donde

$$\frac{1}{\lambda} d_{A_1}(g_1, g_2) \leq d_{A_2}(\mathrm{id}(g_1), \mathrm{id}(g_2)). \qquad (8)$$

De las desigualdades (6) y (8), y tomando $\varepsilon = 0$, tenemos que

$$\frac{1}{\lambda} d_{A_1}(g_1, g_2) - \varepsilon \leq d_{A_2}(\mathrm{id}(g_1), \mathrm{id}(g_2)) \leq \lambda d_{A_1}(g_1, g_2) + \varepsilon.$$

De los dos casos anteriores se sigue que (G, d_{A_1}) está embebido cuasi isométricamente en (G, d_{A_2}).

De otra parte, dado $h \in (G, d_{A_2})$, sea $g := h$; entonces $g \in (G, d_{A_1})$ y

$$d_{A_2}(\mathrm{id}(g), h) = d_{A_2}(g, h) = d_{A_2}(g, g) = 0 < 1.$$

Tomando $C = 1$ se sigue que para todo $h \in (G, d_{A_2})$, existe $g \in (G, d_{A_1})$ tal que $d_{A_2}(\mathrm{id}(g), h) < C$. Por tanto (G, d_{A_1}) es C-I a (G, d_{A_2}). ☑

Proposición 4.4. *Sean G_1 y G_2 grupos con conjuntos generadores finitos A_1 y A_2, respectivamente. Si G_1 es C-I a G_2 y G_2 tiene una presentación finita $\langle A_2 \mid R_2\rangle$, entonces G_1 tiene una presentación finita $\langle A_1 \mid R_1\rangle$.*

Demostración. Ver [1, p. 143]. ☑

5. Conclusiones

En este artículo se hizo una breve introducción a la teoría geométrica de grupos considerada como una nueva área de las matemáticas a partir de la década de 1980. La discusión se centró en construir a partir de un grupo finitamente presentado su grafo de Cayley, el cual se puede dotar de una estructura de espacio métrico con la métrica de la palabra, y posteriormente, visto como espacio topológico, estudiar propiedades que puedan ser traducidas en propiedades algebraicas del grupo del que se partió. Por ejemplo, finitud del grupo, finitud de una presentación, existencia de subgrupos con ciertas características, entre otras. Detalles de estas relaciones pueden estudiarse en [2] y [3].

Referencias

[1] Bridson M. y Haefliger A., *Metric spaces of non-positive curvature*, Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[2] De la Harpe P., *Topics in geometric group theory*, Chicago Lectures in Mathematics, University of Chicago Press, Chicago, IL, 2000.

[3] Geoghegan R., *Topological methods in group theory*, Graduate Texts in Mathematics, 243, Springer, New York, 2008.

[4] Hatcher A., *Algebraic topology*, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[5] Johnson D.L., *Presentations of groups*, London Mathematical Society Student Texts, 15, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[6] Lima E.L., *Espaços métricos*, Projecto Euclides, CNPq, Rio de Janeiro, 2003.